Variables aléatoires continues

1 Définition

Soit Ω un univers et S une tribu sur Ω. Rappelons qu'**variable aléatoire** $X : (\Omega, S) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une application mesurable, i.e. pour tout B dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B\} \in S.$$

Considérons une probabilité $\mathbb{P}$ sur (Ω, S). On rappelle que la loi de la variable aléatoire X est donnée par l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X, et par la loi $\mathbb{P}_X : S \to [0, 1]$ de X définie pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in B).$$

Dans ce chapitre, on s'intéressera exclusivement aux variables aléatoires continues.

Définition 1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que f est une* ***densité de probabilité*** *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.*
2. *$f(t) \geq 0 \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}$.*
3. *$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$.*

Définition 2 *Soit f une densité de probabilité. On dit qu'une variable aléatoire X est* ***de densité de probabilité*** *f si, pour tout a et b réels tels que $a \leq b$,*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\ dt.$$

On dit alors que X est une ***variable aléatoire à densité*** *ou* ***continue*** *ou encore* ***réelle*** *(ce qu'on notera X v.a.r.).*

Remarques

– Soit $a \in \mathbb{R}$. On a, d'après la définition :

$$\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(t)\ dt = 0.$$

C'est une distinction importante du cas discret. Ici, la probabilité que X prenne une valeur particulière est forcément nulle. Une conséquence immédiate est que, dans le cas continu, les inégalités strictes ou larges sont indifférentiables : si $a \leq b$ réels,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b).$$

– En toute généralité, la loi d'une variable aléatoire X à valeurs réelles comporte trois parties : une partie absolument continue, décrite par une densité f comme ci-dessus ; une partie atomique, correspondant à une mesure discrète et décrite dans le chapitre précédent ; et une troisième partie, appelée partie singulière et plus difficile à décrire, qui est en fait simplement la partie qui n'est ni atomique, ni absolument continue. Même si ce cours se restreint à l'étude des variables aléatoires discrètes et continues, il faut garder à l'esprit que cela ne recouvre pas tous les types de variables aléatoires.

Définition 3 *On appelle* ***fonction de répartition d'une v.a.r.*** *X de densité f la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt.$$

Proposition 4 *Soit F la fonction de répartition d'une v.a.r. X de densité f. Alors :*

1. *F est à valeurs dans $[0,1]$.*
2. *F est croissante sur $\mathbb{R}$.*
3. *Pour tout $a \leq b$ réels, $\mathbb{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$.*
4. *$\lim\limits_{x \mapsto -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} F(x) = 1$.*
5. *F est continue sur $\mathbb{R}$.*
6. *F est dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf en au plus un nombre dénombrable de points, et $F'(x) = f(x)$ si F dérivable en x.*

En fait, seules les deux dernières propriétés changent par rapport au cas discret : F est maintenant continue au lieu d'être juste continue à droite. C'est ce qui permet de distinguer la fonction de répartition d'une v.a. discrète de celle d'une v.a. réelle.
Le dernier point permet d'obtenir la densité lorsqu'on connait la fonction de répartition :
– Si on connait f, on obtient F en intégrant.
– Si on connait F, on obtient f en dérivant.

La relation entre F et f est utile lorsqu'on cherche la densité d'une variable $\varphi(X)$, où φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5 *Si φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et si X est une v.a.r., alors $Y = \varphi(X)$ est une v.a.r.*

Pour obtenir la densité de Y, nous procéderons en pratique comme suit : notons F_X la fonction de répartition de X et F_Y celle de Y. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{array}{rcl} F_Y(x) & = & \mathbb{P}(Y \leq x) \\ & = & \mathbb{P}(\varphi(X) \leq x) \\ & = & \mathbb{P}(\varphi(X) \in]-\infty, x]) \\ & = & \mathbb{P}\big(X \in \varphi^{-1}(]-\infty, x])\big) \end{array}$$

Il suffit d'exprimer $\mathbb{P}\big(X \in \varphi^{-1}(]-\infty, x])\big)$ en fonction de F_X puis de dériver pour obtenir la densité de Y.

Par exemple, si $\varphi(X) = \dfrac{2X-3}{5} = Y$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} F_Y(x) & = & \mathbb{P}(\varphi(X) \leq x) \\ & = & \mathbb{P}\left(\dfrac{2X-3}{5} \leq x\right) \\ & = & \mathbb{P}\left(X \leq \dfrac{5x+3}{2}\right) \\ & = & F_X\left(\dfrac{5x+3}{2}\right) \end{array}$$

donc si F_X est dérivable en $\dfrac{5x+3}{2}$, $f_Y(x) = F'_Y(x) = \dfrac{5}{2} f_X\left(\dfrac{5x+3}{2}\right)$.

2 Espérance et variance

Définition 6 *Soit X une v.a.r. de densité f. X est dite* ***intégrable*** *si la quantité*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$$

*existe. On définit alors l'**espérance** mathématique ou valeur moyenne de X par :*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx.$$

De plus, si φ est une fonction réelle,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ f(x)\ dx$$

si elle existe.

C'est l'analogue du cas dénombrable. Au lieu d'avoir des sommes, on a des intégrales.

Définition 7 *Soit X une v.a.r. de densité f et d'espérance m. Supposons que X soit de carré intégrable, i.e.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2\ f(x)\ dx$$

*existe. Alors la **variance** de X est définie par :*

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2\ f(x)\ dx = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

où $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx$. On appelle écart-type la quantité $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

ATTENTION, de la même façon que pour les lois dénombrables, l'espérance et la variance d'une v.a.r. n'existent pas forcément.

On retrouve les propriétés de l'espérance et de la variance.

Proposition 8 *Soit X et Y deux v.a.r. et a et b deux réels. Si les espérances et les variances utilisées existent, alors :*

1. $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
2. $\mathbb{E}(aX+b) = a\ \mathbb{E}(X) + b$.
3. $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

La démonstration se fait comme dans le chapitre précédent, en utilisant des intégrales (sauf le premier point qui sera démontré dans le prochain chapitre).

3 Lois continues classiques

3.1 Loi uniforme

Définition 9 *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une v.a.r. X suit la loi uniforme sur $]a,b[$ (noté $X \sim \mathcal{U}(]a,b[)$) si elle a pour densité de probabilité la fonction :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est l'analogue de la loi uniforme discrète en continue.

Proposition 10 *Si $X \sim \mathcal{U}(]a,b[)$, alors X a pour fonction de répartition :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

Proposition 11 *Si $X \sim \mathcal{U}(]a,b[)$, X admet une espérance et une variance :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

3.2 Loi de Cauchy

Définition 12 *On dit qu'une v.a.r. X suit la loi de Cauchy si sa densité de probabilité est la fonction :*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Cette loi n'a pas de paramètre, c'est pour cela qu'on parle de <u>la</u> loi de Cauchy, et pas d'une loi de Cauchy.

Proposition 13 *Si X suit la loi de Cauchy, elle a pour fonction de répartition la fonction :*

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Proposition 14 *Si X suit une loi de Cauchy, elle n'a ni espérance ni variance.*

Cette loi est le seul cas, parmi les lois classiques, qui ne possède pas d'espérance.

3.3 Loi exponentielle

Définition 15 *Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une v.a.r. X suit une loi exponentielle de paramètre λ (noté $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$) si sa densité de probabilité est :*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si} \quad 0 < x \end{cases}$$

Proposition 16 *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, X a pour fonction de répartition la fonction :*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si} \quad 0 < x \end{cases}$$

Proposition 17 *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

La loi exponentielle a une propriété spéciale : l'absence de mémoire, ou processus sans mémoire. C'est cette caractéristique qui fait qu'on l'utilise en général pour simuler des temps d'attente (d'un bus, durée d'une conversation téléphonique, etc). On le montre de la façon suivante : soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. On suppose que $X > x$ (la conversation, par exemple, dure depuis x minutes). On veut calculer la probabilité que $X < y$ (où $x < y$).

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < y / X > x) &= \frac{\mathbb{P}(X < y, X > x)}{\mathbb{P}(X > x)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(x < X < y)}{\mathbb{P}(x < X < +\infty)} \\ &= \frac{F(y) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{1 - e^{-\lambda y} - 1 + e^{-\lambda x}}{1 - 1 + e^{-\lambda x}} \\ &= 1 - e^{-\lambda(y-x)} = F(y-x) = \mathbb{P}(X < y - x). \end{aligned}$$

D'où la proposition :

Proposition 18 *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors pour tous réels x et y tels que $0 < x < y$, on a :*

$$\mathbb{P}(X < y / X > x) = \mathbb{P}(X < y - x).$$

C'est ce qu'on appelle phénomène sans mémoire : qu'on considère que le phénomène démarre à l'instant ou qu'on suppose qu'il a démarrer depuis un temps x revient au même.

3.4 Loi normale

Définition 19 *On dit qu'une v.a.r. X suit la loi normale de paramètres 0 et 1 (noté $X \sim \mathcal{N}(0,1)$) si sa densité est la fonction :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Il est intéressant de vérifier que l'intégrale de la densité sur $\mathbb{R}$ vaut bien 1.

Calculons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy\right) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\, dxdy.$$

On procède à un changement de variables : on passe en coordonnées polaires :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos(\theta) \\ y & = & r\sin(\theta) \end{array}\right. \qquad \text{avec} \left\{\begin{array}{lcl} r & \in &]0,+\infty[\\ \theta & \in & [0,2\pi[\end{array}\right. \qquad \text{et } dxdy = rdrd\theta.$$

Avec ce changement de variables, I^2 devient :

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\, rdrd\theta \\ &= \int_0^{+\infty} r\, e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \left[-e^{-\frac{r^2}{2}}\right]_0^{+\infty} \times [\theta]_0^{2\pi} \\ &= (0+1)\times 2\pi = 2\pi. \end{aligned}$$

Donc on a $I = \sqrt{2\pi}$ car $I > 0$ et par conséquent l'intégrale de la densité vaut bien 1.

Remarque Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

On ne sait pas calculer de primitive de $e^{-\frac{t^2}{2}}$, et donc de manière générale on ne peut pas calculer explicitement $\mathbb{P}(X \leq x)$. Il n'y a donc pas de formule pour la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
Pour les calculer, on utilise des tables dites de la loi normale qui donne des valeurs approchées de $\mathbb{P}(0 \leq X \leq x)$ pour certains x.

Définition 20 *Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On dit qu'une v.a.r. X suit une loi normale de paramètres m et σ (noté $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$) si $\dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale de paramètres 0 et 1, c'est à dire :*

$$X \sim \mathcal{N}(m,\sigma) \Longleftrightarrow \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

On peut, à partir de la définition, calculer la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$.

Proposition 21 *Si $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, X a pour densité la fonction :*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Preuve. On va appliquer la technique vue à la fin de la première partie (dans la preuve du théorème 4.1.5).
On sait, d'après la définition, que :

$$X \sim \mathcal{N}(m,\sigma) \Longleftrightarrow Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) &&= \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq \frac{x-m}{\sigma}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{x-m}{\sigma}\right) &&= F_Y\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Comme F_Y est dérivable sur $\mathbb{R}$, F_X l'est aussi et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= F_X'(x) = \frac{1}{\sigma} f_Y\left(\frac{x-m}{\sigma}\right). \\ &= \frac{1}{\sigma} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2 \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

□

Proposition 22 *Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, alors X admet une espérance et une variance :*

$$\mathbb{E}(X) = m \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

4 Tableau récapitulatif

Voici un tableau présentant les principaux résultats de cette partie :

Loi de X	$f(x)$	$F(x)$	$\mathbb{E}(X)$	$V(X)$
$\mathcal{U}(]a, b[)$	$\frac{1}{b-a}$ si $a < x < b$ 0 *sinon*	0 si $x \leq a$ $\frac{x-a}{b-a}$ si $a < x < b$ 1 si $b \leq x$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
Cauchy	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\frac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right)$	/	/
$\mathbb{E}(\lambda)$	0 si $x \leq 0$ $\lambda\ e^{-\lambda x}$ si $0 < x$	0 si $x \leq 0$ $1 - e^{-\lambda x}$ si $0 < x$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(m, \sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	$\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\ dt$	m	σ^2